



Prof./Ens. XXX - Examen de XXX - Section XX

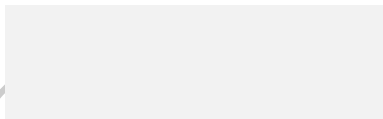


Date - durée: XhYYm

# ID













## NOM DE L'ETUDIANT

SCIPER: **SCIPER**

Signature: 

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient XX pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - +3 points si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses inscrites,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - +1 point si la réponse est correcte,
  - 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses inscrites,
  - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

|  |   |   |
|--|---|---|
| Respectez les consignes suivantes   Observe this guidelines   Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien   |   |   |
| choisir une réponse   select an answer<br>Antwort auswählen  | ne PAS choisir une réponse   NOT select an answer<br>NICHT Antwort auswählen        | Corriger une réponse   Correct an answer<br>Antwort korrigieren   |
|     |  |   |
| ce qu'il ne faut <b>PAS</b> faire   what should <b>NOT</b> be done   was man <b>NICHT</b> tun sollte   |   |   |
|       |   |   |



## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1** Soit le sous-ensemble  $E \subset \mathbb{R}$  défini par  $E = \left\{ 2 \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ .

Alors

- le supremum de  $E$  appartient à  $E$
- le minimum de  $E$  est 2
- $E$  est fermé
- 10 est un majorant de  $E$

**Question 2** L'équation  $z^{-1} = \bar{z}$ , où  $\bar{z}$  est le complexe conjugué de  $z$ , admet

- une infinité de solutions dans  $\mathbb{C}$
- aucune solution dans  $\mathbb{C}$
- exactement une solution dans  $\mathbb{C}$
- exactement deux solutions dans  $\mathbb{C}$



## Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

**Question 3** Soit  $A$  un sous-ensemble borné et non vide de  $\mathbb{R}$ .

Alors  $\inf A \in A$  et  $\sup A \in A$ .

VRAI       FAUX

**Question 4** Soient  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions définies sur tout  $\mathbb{R}$ . Si  $f \circ g$  est injective, alors  $g$  est injective.

VRAI       FAUX

PROJET



### Troisième partie, question de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

**Question 5:** *Cette question est notée sur 5 points.*

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

Soit  $\Psi : \mathbb{R}_3[x] \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$  l'application définie par

$$\Psi(p)(x) = (x - 1)p'(x).$$

1. Montrer que  $\Psi$  est linéaire.
2. Calculer la matrice  $[\Psi]_{E,E}$  de  $\Psi$  par rapport à la base canonique  $E = (1, x, x^2, x^3)$ .
3. Calculer le rang de  $\Psi$ .



PROJET



**Question 6:** *Cette question est notée sur 6 points.*

Soient  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie, et  $X, Y$  deux sous-espaces vectoriels de  $V$  tels que  $\dim(X) \geq \dim(Y)$ . Montrer qu'il existe une application linéaire  $T : V \rightarrow V$  telle que  $T(X) = Y$ .



**Question 7:** Cette question est notée sur 6 points.

|                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 0 | <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | 6 |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice  $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$ , où  $n \geq 1$  est un entier. Montrer la formule par récurrence.
2. On pose  $\alpha = 1 + i$ . Calculer  $\alpha^{99}$  et  $\alpha^{100}$ .
3. Calculer  $\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}^{100}$ .





**Question 8:** Cette question est notée sur 10 points.

|                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |   |                          |    |                          |   |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|----|--------------------------|---|
| <input type="checkbox"/> | 0 | <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | .  | <input type="checkbox"/> | 5 |
| <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | 6 | <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | 7 | <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | 8 | <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | 9 | <input type="checkbox"/> | . | <input type="checkbox"/> | 10 |                          |   |

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice  $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$ , où  $n \geq 1$  est un entier. Montrer la formule par récurrence.
2. On pose  $\alpha = 1 + i$ . Calculer  $\alpha^{99}$  et  $\alpha^{100}$ .
3. Calculer  $\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}^{100}$ .







PROJET



**Question 9:** *Cette question est notée sur 15 points.*

|                          |   |                          |   |                          |    |                          |    |                          |    |                          |    |                          |    |                          |    |
|--------------------------|---|--------------------------|---|--------------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|----|--------------------------|----|
| <input type="checkbox"/> | 0 | <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | 2  | <input type="checkbox"/> | 3  | <input type="checkbox"/> | 4  | <input type="checkbox"/> | 5  | <input type="checkbox"/> | 6  | <input type="checkbox"/> | 7  |
| <input type="checkbox"/> | 8 | <input type="checkbox"/> | 9 | <input type="checkbox"/> | 10 | <input type="checkbox"/> | 11 | <input type="checkbox"/> | 12 | <input type="checkbox"/> | 13 | <input type="checkbox"/> | 14 | <input type="checkbox"/> | 15 |

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice  $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$ , où  $n \geq 1$  est un entier. Montrer la formule par récurrence.
2. On pose  $\alpha = 1 + i$ . Calculer  $\alpha^{99}$  et  $\alpha^{100}$ .
3. Calculer  $\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}^{100}$ .





PROJET



PROJET