Ens. : TEACHER NAME
EXAM NAME - MAN
DATE
Durée : XXX minutes

1

Student One

SCIPER : **111111**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ défini par $E = \left\{ 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Alors

- [ ] E est fermé
- [ ] le minimum de E est 2
- [x] 10 est un majorant de E
- [x] 10 est un majorant de E
- [ ] le supremum de E appartient à E

Question 2 L'équation $z^{-1} = \overline{z}$, où $\overline{z}$ est le complexe conjugué de z, admet

- [x] une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$
- [ ] exactement une solution dans $\mathbb{C}$
- [ ] aucune solution dans $\mathbb{C}$
- [ ] exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$

Question 3 Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ défini par $E = \left\{ 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Alors

- [x] 10 est un majorant de E
- [ ] E est fermé
- [ ] le minimum de E est 2
- [ ] le supremum de E appartient à E

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 4 Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur tout $\mathbb{R}$. Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 5 Soit A un sous-ensemble borné et non vide de $\mathbb{R}$.
Alors $\inf A \in A$ et $\sup A \in A$.

☐ VRAI ■ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

Soit $\Psi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ l'application définie par

$$\Psi(p)(x) = (x-1)p'(x).$$

1. Montrer que Ψ est linéaire. (1 pt)
2. Calculer la matrice $[\Psi]_{E,E}$ de Ψ par rapport à la base canonique $E = (1, x, x^2, x^3)$. (2 pts)
3. Calculer le rang de Ψ. (2 pt)

Question 10: *Cette question est notée sur 6 points.*

Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie, et X, Y deux sous-espaces vectoriels de V tels que $\dim(X) \geq \dim(Y)$. Montrer qu'il existe une application linéaire $T : V \to V$ telle que $T(X) = Y$.

Question 11: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

Question 12: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ .5 ☐ 1 ☐ .5 ☐ 2 ☐ .5 ☐ 3 ☐ .5 ☐ 4 ☐ .5 ☐ 5
☐ .5 ☐ 6 ☐ .5 ☐ 7 ☐ .5 ☐ 8 ☐ .5 ☐ 9 ☐ .5 ■ 10

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

Question 13: *Cette question est notée sur 20 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9 ☐ 10
☐ 11 ☐ 12 ☐ 13 ☐ 14 ☐ 15 ☐ 16 ☐ 17 ☐ 18 ☐ 19 ■ 20

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

Ens. : TEACHER NAME
EXAM NAME - MAN
DATE
Durée : XXX minutes

2

Student Two

SCIPER : **222222**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 L'équation $z^{-1} = \overline{z}$, où $\overline{z}$ est le complexe conjugué de z, admet

- [ ] exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$
- [ ] aucune solution dans $\mathbb{C}$
- [ ] exactement une solution dans $\mathbb{C}$
- [x] une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$

Question 2 Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ défini par $E = \left\{ 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Alors

- [ ] le supremum de E appartient à E
- [ ] E est fermé
- [x] 10 est un majorant de E
- [x] 10 est un majorant de E
- [ ] le minimum de E est 2

Question 3 Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ défini par $E = \left\{ 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Alors

- [ ] E est fermé
- [x] 10 est un majorant de E
- [ ] le minimum de E est 2
- [ ] le supremum de E appartient à E

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 4 Soit A un sous-ensemble borné et non vide de $\mathbb{R}$.
Alors $\inf A \in A$ et $\sup A \in A$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 5 Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur tout $\mathbb{R}$. Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

■ VRAI ☐ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

Soit $\Psi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ l'application définie par

$$\Psi(p)(x) = (x-1)p'(x).$$

1. Montrer que Ψ est linéaire. (1 pt)
2. Calculer la matrice $[\Psi]_{E,E}$ de Ψ par rapport à la base canonique $E = (1, x, x^2, x^3)$. (2 pts)
3. Calculer le rang de Ψ. (2 pt)

Question 10: *Cette question est notée sur 6 points.*

Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie, et X, Y deux sous-espaces vectoriels de V tels que $\dim(X) \geq \dim(Y)$. Montrer qu'il existe une application linéaire $T : V \to V$ telle que $T(X) = Y$.

Question 11: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

Question 12: *Cette question est notée sur 10 points.*

$\square$ 0 $\square$ .5 $\square$ 1 $\square$ .5 $\square$ 2 $\square$ .5 $\square$ 3 $\square$ .5 $\square$ 4 $\square$ .5 $\square$ 5
$\square$ .5 $\square$ 6 $\square$ .5 $\square$ 7 $\square$ .5 $\square$ 8 $\square$ .5 $\square$ 9 $\square$ .5 $\blacksquare$ 10

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

Question 13: *Cette question est notée sur 20 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10
☐11 ☐12 ☐13 ☐14 ☐15 ☐16 ☐17 ☐18 ☐19 ■20

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

Ens. : TEACHER NAME
EXAM NAME - MAN
DATE
Durée : XXX minutes

3

Student Three

SCIPER : **333333**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  +3 points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  −1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  +1 point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  −1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ défini par $E = \left\{ 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Alors

- [ ] le supremum de E appartient à E
- [ ] le minimum de E est 2
- [ ] E est fermé
- [x] 10 est un majorant de E

Question 2 L'équation $z^{-1} = \overline{z}$, où $\overline{z}$ est le complexe conjugué de z, admet

- [ ] aucune solution dans $\mathbb{C}$
- [ ] exactement une solution dans $\mathbb{C}$
- [x] une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$
- [ ] exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$

Question 3 Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ défini par $E = \left\{ 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Alors

- [ ] le supremum de E appartient à E
- [ ] le minimum de E est 2
- [ ] E est fermé
- [x] 10 est un majorant de E
- [x] 10 est un majorant de E

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 4 Soit A un sous-ensemble borné et non vide de $\mathbb{R}$.
Alors $\inf A \in A$ et $\sup A \in A$.

☐ VRAI ■ FAUX

Question 5 Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur tout $\mathbb{R}$. Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

■ VRAI ☐ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

Soit $\Psi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ l'application définie par

$$\Psi(p)(x) = (x-1)p'(x).$$

1. Montrer que Ψ est linéaire. (1 pt)
2. Calculer la matrice $[\Psi]_{E,E}$ de Ψ par rapport à la base canonique $E = (1, x, x^2, x^3)$. (2 pts)
3. Calculer le rang de Ψ. (2 pt)

Question 10: *Cette question est notée sur 6 points.*

Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie, et X, Y deux sous-espaces vectoriels de V tels que $\dim(X) \geq \dim(Y)$. Montrer qu'il existe une application linéaire $T : V \to V$ telle que $T(X) = Y$.

Question 11: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

Question 12: *Cette question est notée sur 10 points.*

$\square_0$ $\square_{.5}$ $\square_1$ $\square_{.5}$ $\square_2$ $\square_{.5}$ $\square_3$ $\square_{.5}$ $\square_4$ $\square_{.5}$ $\square_5$
$\square_{.5}$ $\square_6$ $\square_{.5}$ $\square_7$ $\square_{.5}$ $\square_8$ $\square_{.5}$ $\square_9$ $\square_{.5}$ $\blacksquare_{10}$

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

Question 13: *Cette question est notée sur 20 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10
☐11 ☐12 ☐13 ☐14 ☐15 ☐16 ☐17 ☐18 ☐19 ■20

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

Ens. : TEACHER NAME
EXAM NAME - MAN
DATE
Durée : XXX minutes

4

Student Four

SCIPER : **444444**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 12 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+3$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  $+1$ point si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Pour votre examen, imprimez de préférence les documents compilés à l'aide de auto-multiple-choice.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ défini par $E = \left\{ 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Alors

- [x] 10 est un majorant de E
- [ ] E est fermé
- [ ] le minimum de E est 2
- [ ] le supremum de E appartient à E

Question 2 Soit le sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ défini par $E = \left\{ 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$.

Alors

- [ ] E est fermé
- [ ] le supremum de E appartient à E
- [ ] le minimum de E est 2
- [x] 10 est un majorant de E
- [x] 10 est un majorant de E

Question 3 L'équation $z^{-1} = \overline{z}$, où $\overline{z}$ est le complexe conjugué de z, admet

- [x] une infinité de solutions dans $\mathbb{C}$
- [ ] exactement deux solutions dans $\mathbb{C}$
- [ ] exactement une solution dans $\mathbb{C}$
- [ ] aucune solution dans $\mathbb{C}$

Deuxième partie, questions du type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou dans la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire, si elle est parfois fausse).

Question 4 Soient $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur tout $\mathbb{R}$. Si $f \circ g$ est injective, alors g est injective.

■ VRAI ☐ FAUX

Question 5 Soit A un sous-ensemble borné et non vide de $\mathbb{R}$.
Alors $\inf A \in A$ et $\sup A \in A$.

☐ VRAI ■ FAUX

Troisème partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 5 points.*

Soit $\Psi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ l'application définie par

$$\Psi(p)(x) = (x-1)p'(x).$$

1. Montrer que Ψ est linéaire. (1 pt)
2. Calculer la matrice $[\Psi]_{E,E}$ de Ψ par rapport à la base canonique $E = (1, x, x^2, x^3)$. (2 pts)
3. Calculer le rang de Ψ. (2 pt)

Question 10: *Cette question est notée sur 6 points.*

Soient V un K-espace vectoriel de dimension finie, et X, Y deux sous-espaces vectoriels de V tels que $\dim(X) \geq \dim(Y)$. Montrer qu'il existe une application linéaire $T : V \to V$ telle que $T(X) = Y$.

Question 11: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ■6

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

Question 12: *Cette question est notée sur 10 points.*

☐ 0 ☐ .5 ☐ 1 ☐ .5 ☐ 2 ☐ .5 ☐ 3 ☐ .5 ☐ 4 ☐ .5 ☐ 5
☐ .5 ☐ 6 ☐ .5 ☐ 7 ☐ .5 ☐ 8 ☐ .5 ☐ 9 ☐ .5 ■ 10

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.

Question 13: *Cette question est notée sur 20 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10
☐11 ☐12 ☐13 ☐14 ☐15 ☐16 ☐17 ☐18 ☐19 ■20

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.

1. Trouver la formule explicite pour les éléments de la matrice $A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}^n$, où $n \geq 1$ est un entier. Montrer la formule par réccurence.
2. On pose $\alpha = 1 + \mathrm{i}$. Calculer α^{99} et α^{100}.
3. Calculer $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}^{100}$.