Question 1 Soit la courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\gamma(t) = \big(t\cos(t),\, t\sin(t),\, t\big)^{\mathrm{T}}.$$

La longueur de l'arc de la courbe γ reliant les points $A = (0,0,0)$ et $B = (2\pi, 0, 2\pi)$ est égale à :

- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{2+t^2}\, dt$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{\pi} (2+t^2)\, dt$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2t^2\, dt$
- ☐ $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{2+t^2}\, dt$

Question 2 Soit $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

Alors

- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = y$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- ☐ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas

Question 3 Soit $D = \,]0,\infty[\, \times \,]0,\infty[$ et la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \big|\mathrm{Log}(x)\,\mathrm{Log}(y)\big|.$$

Alors

- ☐ la dérivée partielle de f par rapport à y n'existe pas en $(1,1)$
- ☐ f est bornée sur D
- ☐ f n'est pas continue en $(1,1)$
- ☐ les dérivées partielles de f existent en $(1,1)$

Question 4 Soit la fonction $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$h(u,v) = \big(u^2\,,\, ve^{-u}\,,\, e^{-2v}\big)^{\mathrm{T}}$$

et soit $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto g(x,y,z)$, une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$. Alors la dérivée partielle par rapport à v de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, définie par $f(u,v) = g\big(h(u,v)\big)$, satisfait en $(u,v) = (1,0)$:

- ☐ $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(1,0,1)$
- ☐ $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = e^{-1}\frac{\partial g}{\partial x}(1,0,1) - e^{-1}\frac{\partial g}{\partial y}(1,0,1)$
- ☐ $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = e^{-1}\frac{\partial g}{\partial y}(1,0,1) - 2\frac{\partial g}{\partial z}(1,0,1)$
- ☐ $\displaystyle\frac{\partial f}{\partial v}(1,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(1,0,1) - e^{-1}\frac{\partial g}{\partial y}(1,0,1)$

Question 5 Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^3 + y^2 - 2x - y$$

et soit le point $\boldsymbol{p} = (1,-1)$. Alors l'équation du plan tangent au graphe de f en $\big(\boldsymbol{p}\,,\, f(\boldsymbol{p})\big)$ est :

- ☐ $z + 2x + y - 2 = 0$
- ☐ $z - x + 3y + 3 = 0$
- ☐ $z + 2x + y + 1 = 0$
- ☐ $z - x + 3y - 1 = 0$

Question 6 Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = (x^2+y)z + z^2 - z$. Alors un vecteur $\boldsymbol{v}$ perpendiculaire à la surface de niveau de f passant par le point $(2,0,-1)$ est :

- ☐ $\boldsymbol{v} = (1,-4,1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = (-1,-4,4)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = (4,1,-1)^{\mathrm{T}}$
- ☐ $\boldsymbol{v} = (-4,1,1)^{\mathrm{T}}$

Question 7 La solution $y(x)$ de l'équation différentielle $x^2\,y' + 4\,y' - x\,y + x = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ avec la condition initiale $y(0) = 5$ satisfait aussi :

- ☐ $y(\sqrt{5}\,) = 7$
- ☐ $y(\sqrt{5}\,) = 1$
- ☐ $y(\sqrt{5}\,) = -7$
- ☐ $y(\sqrt{5}\,) = 2$

Question 8 La solution $u(t)$ de l'équation différentielle $u'' - u' - 2u = 4t - 2$ pour $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 3$ satisfait aussi :

- ☐ $u(1) = e - e^{-2}$
- ☐ $u(1) = e^2 - e^{-1}$
- ☐ $u(1) = e^2 - 3e^{-1}$
- ☐ $u(1) = -2e^{-2} - 2e + 2$

Question 9 Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\big\}$ et la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \mathrm{Log}(x^2+y)\,.$$

Alors la dérivée directionnelle de f au point $(2,1)$ suivant le vecteur $\boldsymbol{e} = \big(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\big)$ est égale à :

- ☐ $\dfrac{85}{29}$
- ☐ $-\dfrac{85}{29}$
- ☐ $\dfrac{16}{25}$
- ☐ $-\dfrac{16}{25}$

Question 10 Soient $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues définies sur l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et soit $L(u) = u'' + p\,u' + q\,u$. Si u_h est une solution de l'équation différentielle $L(u) = 0$ sur I et u_p est une solution de l'équation différentielle $L(u) = g$ sur I, où $g(t) = \cos(t^2)$, alors $3u_p + u_h$ est solution de l'équation différentielle $L(u) = 3g$ sur I.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(0,0) = 1$. Si pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé on a $\lim_{x\to 0} f(x,ax) = 1$, alors f est continue en $(0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$. Alors, pour tout point $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\boldsymbol{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\boldsymbol{p})$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^3$, alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^3)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 14 L'ensemble $D = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\,,\ y > 0\,,\ z = 0\big\}$ est ouvert.

☐ VRAI ☐ FAUX