

1.3-4. Notation Matricielle

April 20, 2020

1 Concept(s)-clé(s) et théorie

On considère un système d'équations linéaires aux inconnues x_1, \dots, x_n

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

où $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $1 \leq j \leq n$.

Le système S peut s'écrire sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ où la matrice A est appelée *la matrice des coefficients* et \vec{x} et \vec{b} sont des vecteurs contenant les composantes x_i et b_i respectivement.

Plus précisément

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix};$$

La matrice A est de taille $m \times n$ où **m** correspond au nombre de lignes et **n** au nombre de colonnes. Le vecteur \vec{x} est de taille $n \times 1$ et le vecteur \vec{b} de taille $m \times 1$.

```
[2]: import Librairie.AL_Fct as al
import Corrections.corrections as corrections
import numpy as np
import ipywidgets as widgets
import random

from ipywidgets import interact, interactive, fixed, interact_manual, Layout
```

1.0.1 EXERCICE 1

Ci-dessous est générée une matrice A de taille $m \times n$. Trouver la dimension de la matrice en remplissant les deux champs dans lesquels vous pouvez rentrer une valeur pour m et n .

Vérifier en cliquant sur **Run Interact**

```
[ ]: A=al.randomA()
al.dimensionA(A)
```

1.0.2 Nouvelles notations

Pour rentrer une matrice on utilise *la syntaxe suivante*

$$A = [[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}], [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}] , \dots, [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}]] .$$

Comme nous souhaitons différencier les vecteurs colonnes - ceux usuel - des vecteurs lignes, nous les différencions **à partir de maintenant** en utilisant *la syntaxe suivante*

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} & \Rightarrow b &= [[b_1], [b_2], \dots, [b_m]] \\ \vec{v} &= (v_1 \ v_2 \ \dots v_n) & \Rightarrow v &= [v_1, v_2, \dots, v_n] \end{aligned}$$

Entrez les vecteurs et matrices ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0.3 \\ 1/4 \end{pmatrix} \quad (1 \ 2 \ -1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
[ ]: al.bgc('seashell')
A=[[1]]
```

```
[ ]: al.printA(A)
```

Lorsqu'on travaille avec des systèmes, on s'intéresse à la matrice augmentée - dans laquelle on retrouve la matrice des coefficients A et une colonne additionnelle correspondant aux termes de droite.

$$\begin{array}{l} \text{Notation système} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Notation matricielle} \\ \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array} \right) \end{array}$$

Pour entrer les matrices augmentées des systèmes, en utilisez la syntaxe suivante

$$\begin{aligned} A &= [[a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}], [a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}] , \dots, [a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}]] \\ b &= [[b_1], [b_2], \dots, [b_m]] \leftarrow \text{ceci nous permet de différencier un vecteur colonne d'un vecteur ligne!} \end{aligned}$$

1.0.3 EXERCICE 2

Entrez les matrices augmentées des systèmes ci-dessous.

$$1) \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + x_2 - x_3 = -6 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ -x_1 + \frac{27}{9}x_2 - x_3 = -1, \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

```
[ ]: al.bgc('seashell')
#Entrer la matrice des coeff et le vecteur des termes de droite. Attention aux
  → dimensions!
A=[[1,1], [1,1]]
b=[[1],[1]]
```

```
[ ]: print('Le système est\n')

al.printSyst(A,b)
print('\n')
print(' Son écriture matricielle est\n')
al.printA(A,b)
```

2 Concept(s)-clé(s) et théorie

Il existe trois type d'opérations que l'on peut effectuer sur un système d'équations linéaires, ou sur la matrice augmentée correspondante, sans changer son ensemble de solution.

Ces opérations sont appelées *opérations élémentaires*

1. E_{ij} (Échange) Échanger la ligne i avec la ligne j .
2. $E_i(\alpha)$ (Multiplication par un scalaire) Multiplier tous les coefficients de la ligne i par une constante non-nulle (α).
3. $E_{ij}(\alpha)$ (Remplacement) Remplacer la ligne i par la ligne obtenue en lui ajoutant un multiple (α) de la ligne j .

2.0.1 EXEMPLE 1 :

Entrer la matrice (augmentée) correspondante au système ci-dessous et effectuer les trois opérations suivantes sur la matrice de départ.

1. Échanger la ligne 1 et la ligne 2.
2. Multiplier tous les coefficients de la ligne 2 par $-\frac{1}{2}$.
3. Remplacer la ligne 2 par la ligne obtenue en lui ajoutant 3 fois la ligne 3.

Le système est

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + \frac{1}{3}x_3 & = 0 \\ x_1 - 7x_3 & = 2 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = 5 \end{cases}$$

```
[ ]: al.bgc('seashell')
#Entrer la matrice des coeff et le vecteur des termes de droite. Attention aux
  ↳ dimensions!
A=[[1, 1, 1], [1, 1, 1], [1, 1, 1]]
b=[[1], [1], [1]]
```

```
[ ]: al.printA(A,b)
al.manualOp(A,b)
```

2.0.2 EXERCICE 3

Parmi les systèmes ci-dessous, lesquels ont le même ensemble de solutions?

$$\begin{array}{llll} a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 2 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 & = 0 \end{cases} & b) \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 & = 2 \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 & = 1 \\ x_3 & = 0 \end{cases} & c) \begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 2 \\ \frac{5}{2}x_2 - x_3 & = 0 \\ x_3 & = -3 \end{cases} & d) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 & = 2 \\ 2x_1 + x_2 & = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 & = 0 \\ -x_1 - \frac{1}{2}x_2 & = 1 \end{cases} \\ e) \begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 2 \\ 3x_1 + 4x_3 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \end{cases} & f) \begin{cases} 2x_1 + x_2 & = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 & = 0 \\ 3x_1 + 4x_3 & = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = 1 \end{cases} & g) \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 & = 1 \\ \frac{5}{2}x_2 - x_3 & = 1 \\ \frac{3}{2}x_1 + 2x_2 & = 0 \end{cases} & h) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 & = 2 \\ -\frac{5}{2}x_2 + x_3 & = 1 \\ \frac{3}{4}x_1 + x_2 & = 0 \end{cases} \end{array}$$

```
[3]: corrections.Ex3Chapitre1_3_4()
```

Cliquer sur CTRL (ou CMD) pour sélectionner plusieurs réponses

interactive(children=(SelectMultiple(description='Systèmes avec le même ensemble de solutions:

[Passez au notebook du chapitre 1.5-1.6: Matrices Echelonnées](#)